Concursul Fractal

Prima Ediție, 10 Noiembrie 2024

Problema 1. În triunghiul ABC, fie M mijlocul laturii BC, iar M_B și M_C, mijloacele laturilor AC și AB respectiv. Fie $P_B \neq C$ intersecția cercurilor circumscrise triunghiurilor MM_BC și ABC, P_C se definește analog. Arătați că: $m(\angle P_BMM_B) - m(\angle P_CMM_C) = m(\angle ABC) - m(\angle ACB)$.

Soluție: Putem vedea că măsura unghiului $m(\angle P_BMM_B)$ este egală cu măsura unghiului P_BCM_B și deci condiția se rescrie ca $m(\angle P_BCM) = m(\angle P_CBM)$. Vom arăta acum ceva mai bun, și anume că triunghiurile CP_BM și BP_CM sunt simetrice față de mediatoarea lui BC. E clar că perechile de puncte B, C și M, M sunt, deci e necesar doar să arăt că P_B este simetricul lui P_C, ce este clar, căci această mediatoare este diametru al cercului circumscris, și deci, cercul circumscris triunghiului ABC, e simetric față de această mediatoare, la fel și cele două cercuri mici.

Notă: Punctele P_B și P_C sunt de fapt punctele B și C, iar cele două drepte sunt tangentele la cercul circumscris, astfel această problemă nu este întocmai corect formulată.

Problema 2. Un pachet este format din 13 tipuri de cărți: $T > K > D > J > 10 > 9 > \cdots > 3 > 2$, fiecare carte repetându-se de 4 ori. În total, sunt 52 de cărți.

Marius și Alexandru primesc fiecare câte jumătate din pachetul standard de cărți, punându-le pe toate cu fața în jos. La fiecare mutare, jucătorii scot simultan cartea cea mai de sus din mâna lor, iar jucătorul care are cartea cea mai valoroasă le ia pe amândouă și le pune sub toate cărțile sale, Marius decizând ordinea în care cele două cărți sunt puse. În caz de egalitate, fiecare își retrage propria carte, la fel, sub restul cărților. Jocul se termină când unul dintre jucători rămâne fără cărți.
Este oare posibil ca, deși Alexandru are inițial toate cele patru cărți de T, jocul să dureze veșnic?

Soluție: Răspunsul este DA. Considerăm situația în care Alexandru are inițial cărțile de T pe prima, a treia, a cincea și a șaptea poziție, iar Marius are patru cărți de K pe a doua, a patra, a șasea și a opta poziție. Vom arăta că Marius mereu își poate păstra cărțile de K în mână, astfel încât e clar că jocul nu are sfârșit. Spunem că o carte este pe poziție pară dacă, până la vârful butucului de cărți în care se află ea, mai este un număr impar de cărți și viceversa. Vom arăta inductiv că Marius poate face astfel încât cărțile de T și cele de K să se afle pe poziții de paritate diferită mereu. Cazul de bază este clar. Pentru pasul de inducție voi distinge 3 cazuri:

1) Cărțile plasate sunt egale și fiecare carte este retrasă.
În acest caz, fiecare carte își schimbă paritatea și atât, deci nu e nimic de demonstrat.

2) O carte este luată de altă carte, însă nu participă vreo carte de K sau T.
În acest caz, toate cărțile își schimbă iar paritatea. Din nou, nimic de demonstrat.

3) Are loc o captură și participă una dintre cărțile T sau K.
Datorită pasului de inducție știm că nu este cazul ca un T să captureze un K, astfel dacă, de exemplu, un T capturează o carte de a lui Marius, toate cărțile de T și K își schimbă paritatea, în afară de cea care participă la captură. Putem însă face astfel încât paritatea cărții de T care a capturat să fie identică cu cea a celorlalte cărți de T, căci la captură Marius alege ordinea plasării cărților.

Astfel, concluzionăm că Marius mereu își păstrează cărțile de K, deci jocul este infinit.

Problema 3. Găsiți toate funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, care satisfac următoarele 2 condiții:

$$\begin{cases} \text{Dacă } f(0) = 0, \text{ atunci } f(x) \neq 0 \text{ pentru orice } x \text{ nenul.} \\ \\ f(x+y)f(y+z)f(z+x) = f(x+y+z)f(xy+yz+zx) - f(x)f(y)f(z) \; \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Soluție: Ca întotdeauna, notăm proprietatea din problemă cu $P(x; y; z)$.

$P(0; 0; 0) \Rightarrow$ sau $f(0) = 0$, sau $f(0) = \frac{1}{2}$.

Dacă $f(0) = \frac{1}{2}$, $P(x; 0; 0) \Rightarrow$ sau $f(x) = 0$, sau $f(x) = \frac{1}{2}$ pentru orice număr real x. E clar că $f \equiv \frac{1}{2}$ este o soluție, astfel asumăm că există un x_0 cu $f(x_0) = 0$. Alegem $x_0 + y + z = 0$ și din $P(x_0; y; z)$ avem că sau $\frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ sau $f(yz - x_0^2) = 0$, deci pentru orice număr a negativ cu modul suficient de mare $f(a) = 0$, însă din $P(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ avem că $f(\frac{a}{3}) = 0$, și deci concludem că pentru orice x strict negativ $f(x) = 0$. Dacă există vreun număr pozitiv y_0 cu $f(y_0) = \frac{1}{2}$, alegem x negativ și $x + y + z = y_0$ ca să obținem că pentru orice număr pozitiv mai mic decât $\frac{y_0^2}{4}$, funcția este zero. Analog, însă din $P(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}; \frac{a}{3})$ am obținut că $f(x)$ este zero pentru orice x nenul și $\frac{1}{2}$ pentru 0.

Acum, dacă $f(0) = 0$, din $P(x; y; 0)$ avem că $f(x)f(y) = f(xy)$ dacă $x + y \neq 0$, și din $P(x; -x; z)$ avem că $f(x)f(y) = f(xy)$ pentru orice numere reale x și y. Condiția se rescrie ca $f(xyz) + f((x+y)(y+z)(z+x)) = f((x+y+z)(xy+yz+zx)$, vom privi la moment ultima proprietate doar pentru numere pozitive. E clar că dacă $xyz = a$, atunci $(x+y)(y+z)(z+x)$ ia orice valoare mai mare sau egală cu $8a$, deci avem $f(x)+f(y) = f(x+y)$ pentru orice $y \geq 8x$. Voi arăta acum că $f(x) - f(y)$ depinde doar de $x - y$. Presupun că $a \geq b$, avem că $f(b+m) - f(b) = f(m) = f(a+m) - f(a)$ pentru orice $m \leq \frac{b}{8}$, deci $f(a+m) - f(b+m) = f(a) - f(b)$, deci $f(a+Nm) - f(b+Nm) = f(a) - f(b)$ pentru orice N natural, deci concludem că $f(x) - f(y)$ depinde doar de $x - y$. Notând $f(x) - f(y) = g(x-y)$ și schimbând y și $x - y$ cu locurile, avem că $f(x) + f(y) = f(x+y)$ pentru orice x și y pozitive, iar cum funcția este impară, avem că $f(x)+f(y) = f(x+y)$ pentru orice x și y numere reale. Este bine cunoscut că aceasta, împreună cu $f(x)f(y) = f(xy)$, implică că $f(x) = x$ pentru orice x sau $f(x) = 0$ pentru orice x, care nu se potrivesc. O demonstrație scurtă ar fi că $f(x^2) = f(x)^2$, deci funcția este pozitivă pentru numere pozitive, deci $f(x) - f(y) = f(\sqrt{x-y})^2$ pentru $x \geq y$, deci funcția este crescătoare, și împreună cu $f(q) = q$ pentru orice număr q rațional, ce reiese din $f(mn) = mf(n)$ putem concluziona.

Astfel, soluțiile sunt:

1) $f(x) = x$ pentru orice număr real x
2) $f(x) = 0$ pentru orice număr real nenul x și $f(0) = \frac{1}{2}$
3) $f(x) = \frac{1}{2}$ pentru orice x

Problema 4. Fie $P(x)$ un polinom cu coeficienți naturali. Notăm cu $d(n)$ numărul de divizori pozitivi ai numărului natural n și cu $\sigma(n)$, suma acestor divizori. Secvența a_n este definită în felul următor:

$$a_{n+1} \in \begin{cases} \sigma(P(d(a_n))) \\ d(P(\sigma(a_n))) \end{cases}$$

Adică a_{n+1} este unul dintre cei doi termeni de mai sus. Arătați că există o constantă C, care depinde de a_1 și $P(x)$ astfel încât pentru orice i, $a_i < C$, cu alte cuvinte, arătați că secvența a_n este mărginită.

Soluție: Vom începe prin demonstrarea unei leme, și anume voi arăta că pentru orice ϵ strict pozitiv există un număr N_ϵ astfel încât pentru orice $n \geq N_\epsilon$, $d(n) \leq n^\epsilon$. Ca de obicei, fie $n = \prod p_i^{\alpha_i}$, iar $d(n) = \prod(\alpha_i + 1)$. Voi mai folosi inegalitatea bine cunoscută $e^x \geq x + 1$, împărțind primele în două tipuri, cele mai mari decât $e^{\frac{1}{\epsilon}}$ și cele mai mici, pentru cele mai mari, avem că $p^\alpha \geq e^{\frac{1}{\epsilon}\alpha} \geq (1+\alpha)^{\frac{1}{\epsilon}}$, deci $\frac{\prod p_i^{\alpha_i}}{(\alpha_i+1)^{\frac{1}{\epsilon}}} \leq \frac{\prod q_i^{\alpha_i}}{(\alpha_i+1)^{\frac{1}{\epsilon}}}$, unde q_i sunt prime mai mici decât $e^{\frac{1}{\epsilon}}$. Acum, deoarece $f(x) = \frac{p^x}{(x+1)^{\frac{1}{\epsilon}}}$ este eventual crescătoare și definită pe x natural, are un minim, deci ultimul produs este compus dintr-un număr finit de termeni care toți sunt mărginiți și avem că el este mărginit de o constantă. Astfel, am arătat că pentru orice ϵ există o constantă c_ϵ astfel încât $d(n) \leq c_\epsilon n^\epsilon$, ceea ce este echivalent cu rezultatul dorit.
La fel, este clar că $\sigma(n) \leq nd(n) \leq n^2$.

Acum, alegând $n > N_{\frac{1}{2 \deg P + 2024}}$, este clar că pentru astfel de n, suficient de mari, $a_{n+1} < a_n$. Fie că, pentru orice n mai mare decât M, următorul termen scade. Dacă secvența ajunge vreodată mai mare decât M, aceasta va ajunge apoi mai mică. Fie C maximul posibil al lui a_{n+1}, unde a_n este un număr de la 1 până la M, este clar de ce C există. Putem concluziona deci că, pentru n suficient de mare, a_n este mai mic decât maximul dintre C și M.